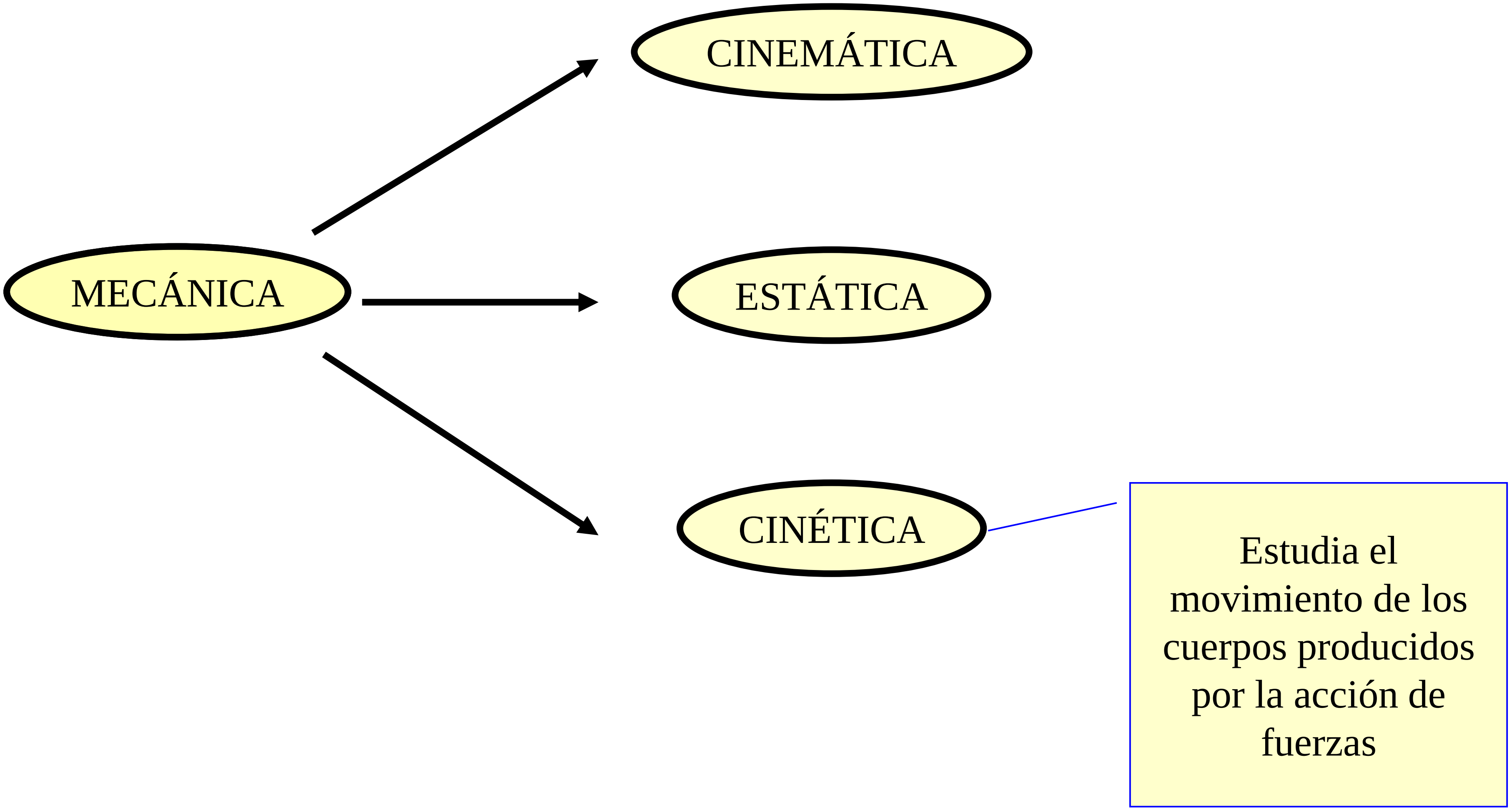
Fundamentos de Robótica: Dinámica de Manipuladores

Juan Carlos Grieco, Universidad Simón Bolívar

Gerardo Fernández L., Universidad Simón Bolívar

Cecilia Murrugarra Q., Universidad Simón Bolívar

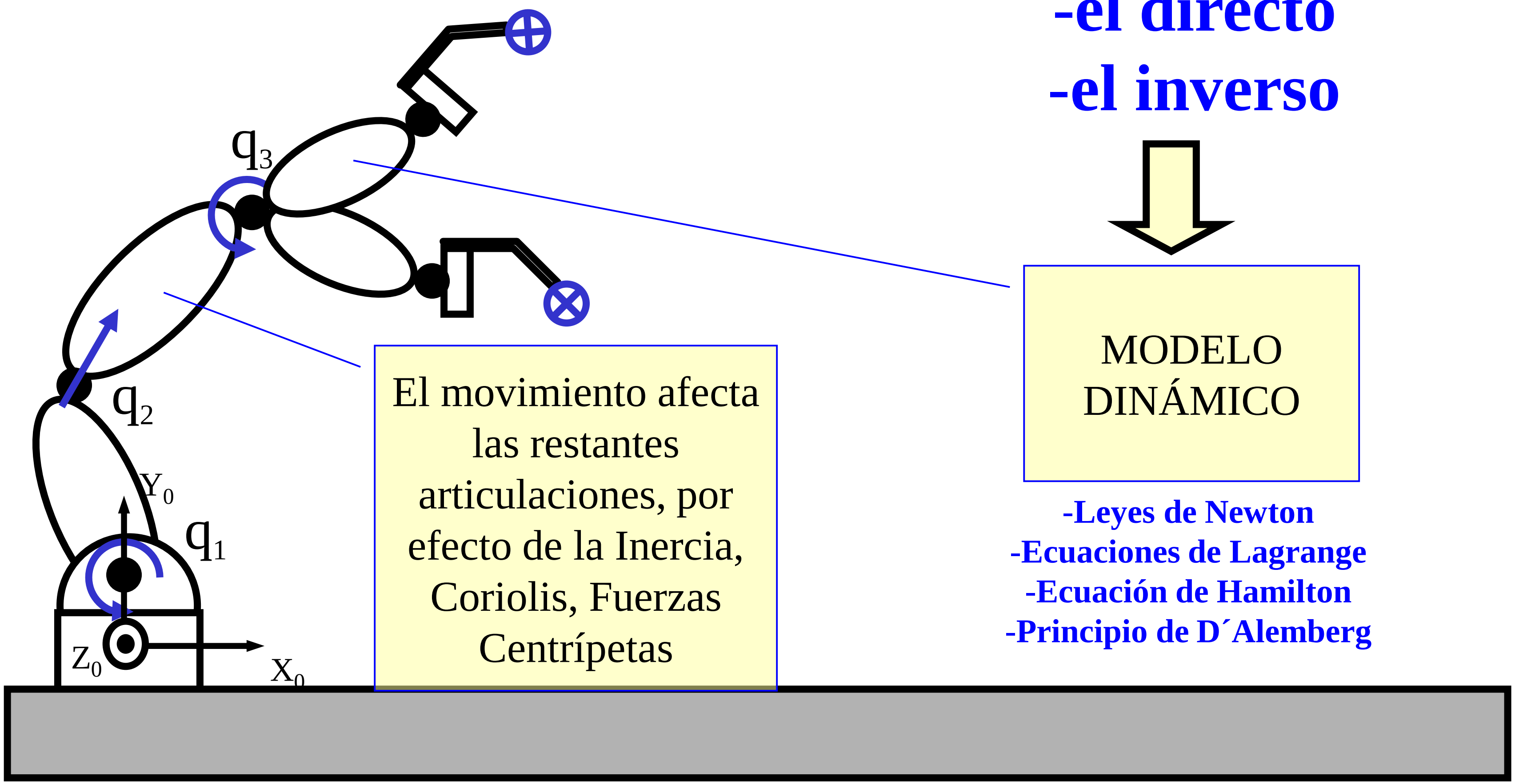
Temas que nos competen...



Temas que nos competen...

En robótica,

Tenemos 2 problemas:
-el directo
-el inverso



-Leyes de Newton
-Ecuaciones de Lagrange
-Ecuación de Hamilton
-Principio de D´Alemberg

Formulación Lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \mathcal{K}(q,\dot{q}) - \mathcal{U}(q)$$

Lagrangiano del SISTEMA

Energía Cinética de todo el sistema

Energía Potencial de todo el sistema

“ Permite describir la dinámica a partir de un balance de energía”

Si el sistema consta de *n* cuerpos:

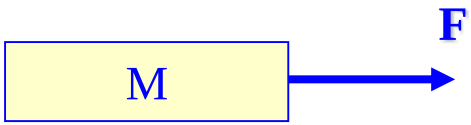
$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i \qquad \mathcal{U} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$$

La ecuación dinámica para el link i-ésimo viene dada por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

“ Ecuación de Movimiento de Euler-Lagrange”

Ejemplo sencillo



$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$\mathcal{U} = mgh = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$Q = F$$

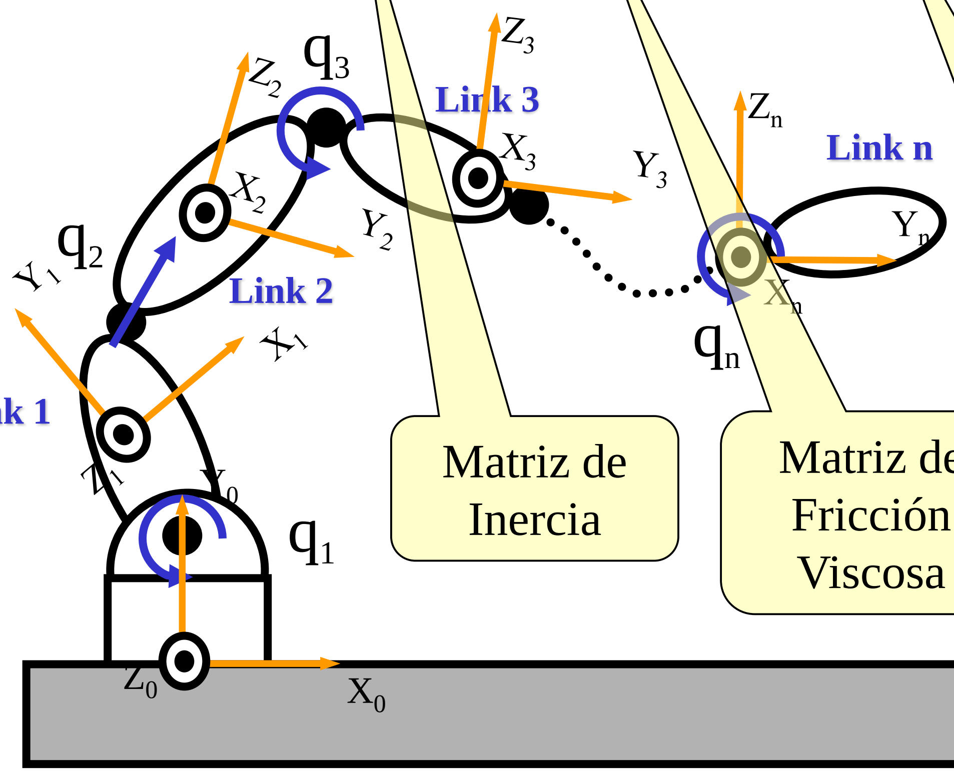
$$\Rightarrow M\ddot{x} = F$$

Ecuación Dinámica general de un manipulador…

$$M(\vec{q})\ddot{\vec{q}} + C(\vec{q})\dot{\vec{q}} + E\left(\vec{q},\dot{\vec{q}}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + D(\vec{q})\dot{\vec{q}}^2 + G(\vec{q}) = \vec{Q}$$

$$\dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix}\dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \cdots & \dot{q}_n\end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{q}}^2 = \begin{bmatrix}\dot{q}_1^2 & \dot{q}_2^2 & \cdots & \dot{q}_n^2\end{bmatrix}$$



Matriz de Inercia

Matriz de Fricción Viscosa

Vector de Coriolis

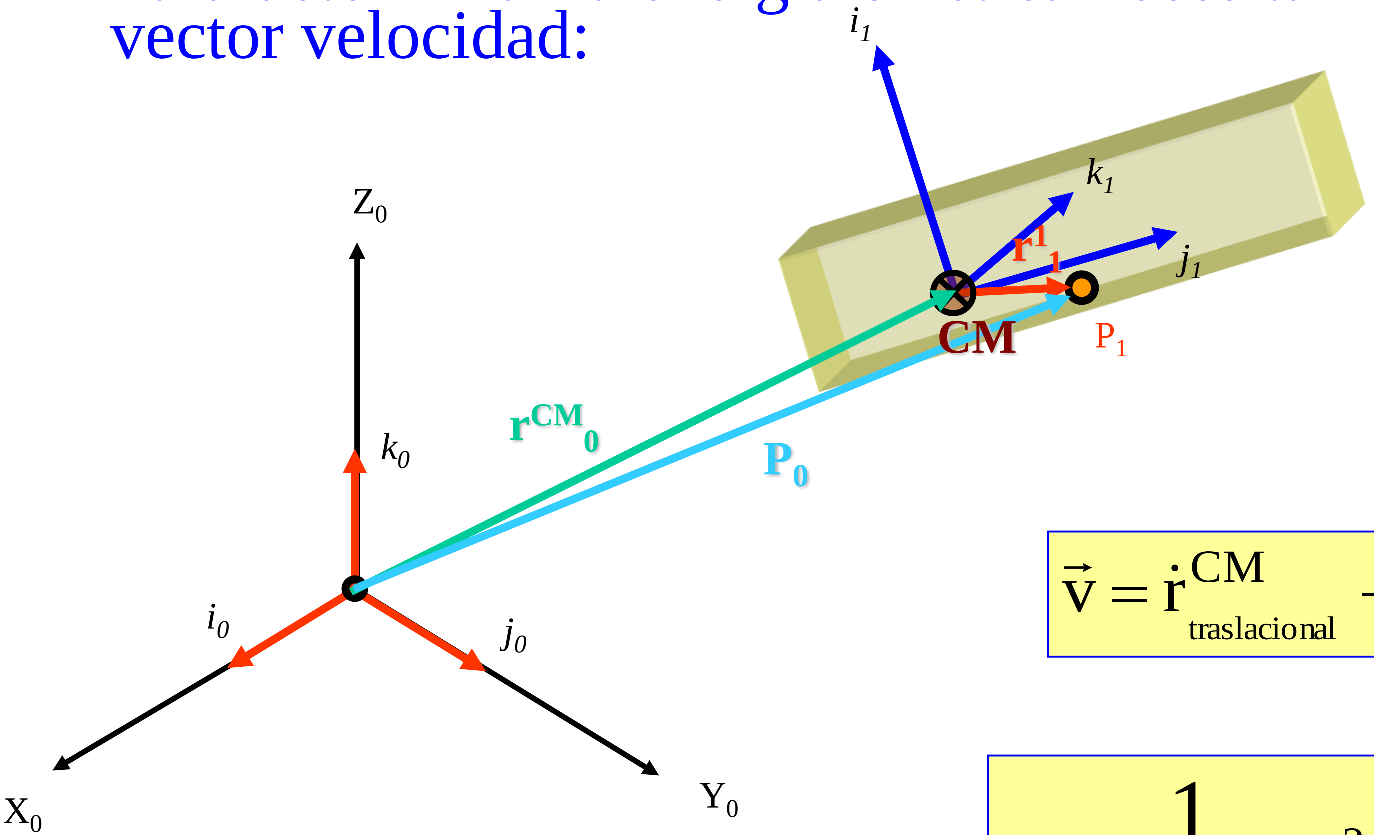
Vector Centrípeta

Vector de Gravedad

Vector de Fuerzas Generalizadas

Determinación del vector velocidad

Para determinar la energía cinética necesitamos calcular el vector velocidad:

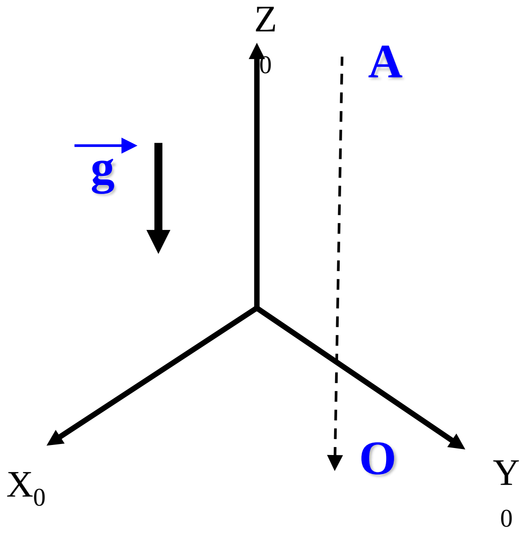


$$\vec{v} = \dot{r}^{CM}_{traslacional} + \vec{\omega}_{1_{CM}} \times \vec{r}_{1_{CM}}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \omega^T I \omega$$

…y necesitamos calcular la Energía Potencial…

$$U = \int_{tray} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{r1}^{r2} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$



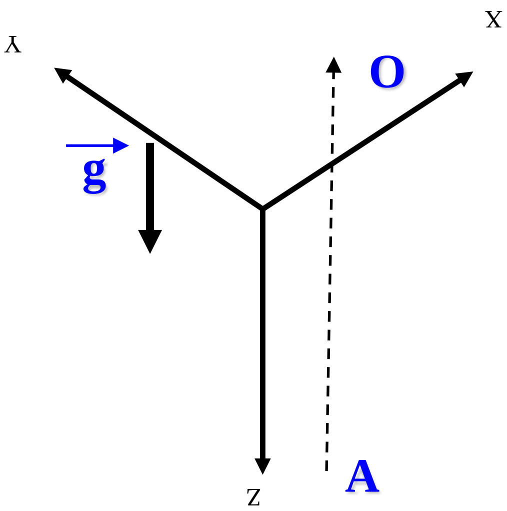
$$U = m \int_{tray} \vec{g}^{\,T} \, \vec{dl}$$

$$U = m \int_A^O \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{bmatrix} = -mg \int_h^0 dz$$

$$= -mg(-h) = mgh$$

…y necesitamos calcular la Energía Potencial…

$$U = m \int_{tray} \vec{g} \cdot \vec{dl}$$

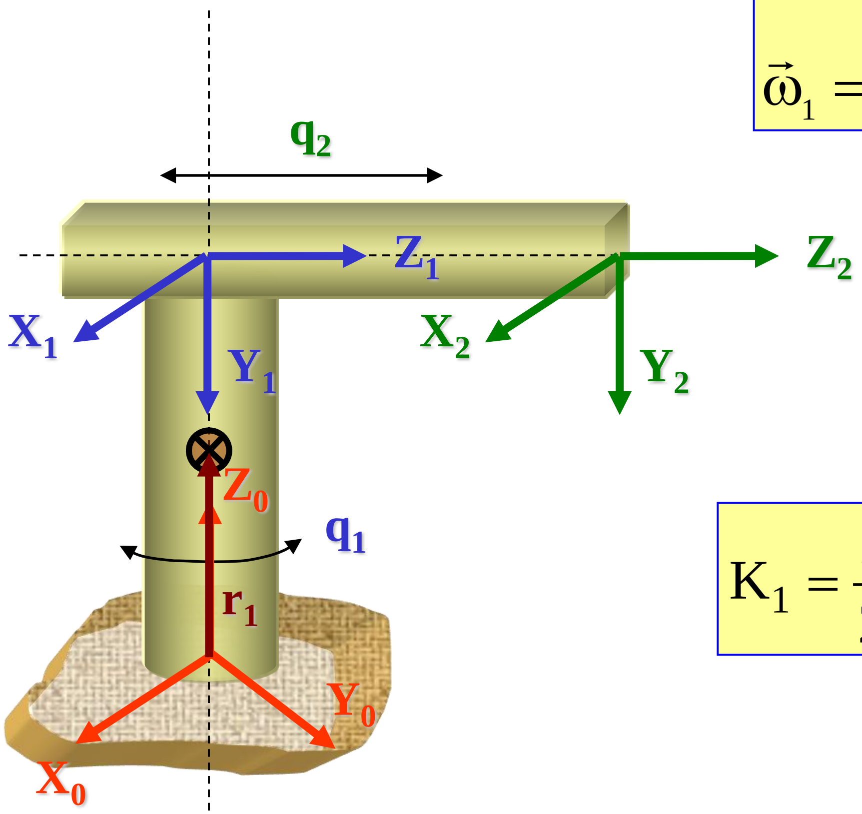


$$U = m \int_{tray} \vec{g}^{\,T} \, \vec{dl}$$

$$U_A = m \int_A^O \begin{bmatrix} 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{bmatrix} = mg \int_h^0 dz$$

$$= mg(-h) = -mgh$$

Ejemplo…



LINK 1

$$\vec{r}_1 = \frac{L_1}{2}\left(\vec{k}_0\right)$$

$$\vec{\omega}_1 = \dot{q}_1\left(\vec{k}_0\right)$$

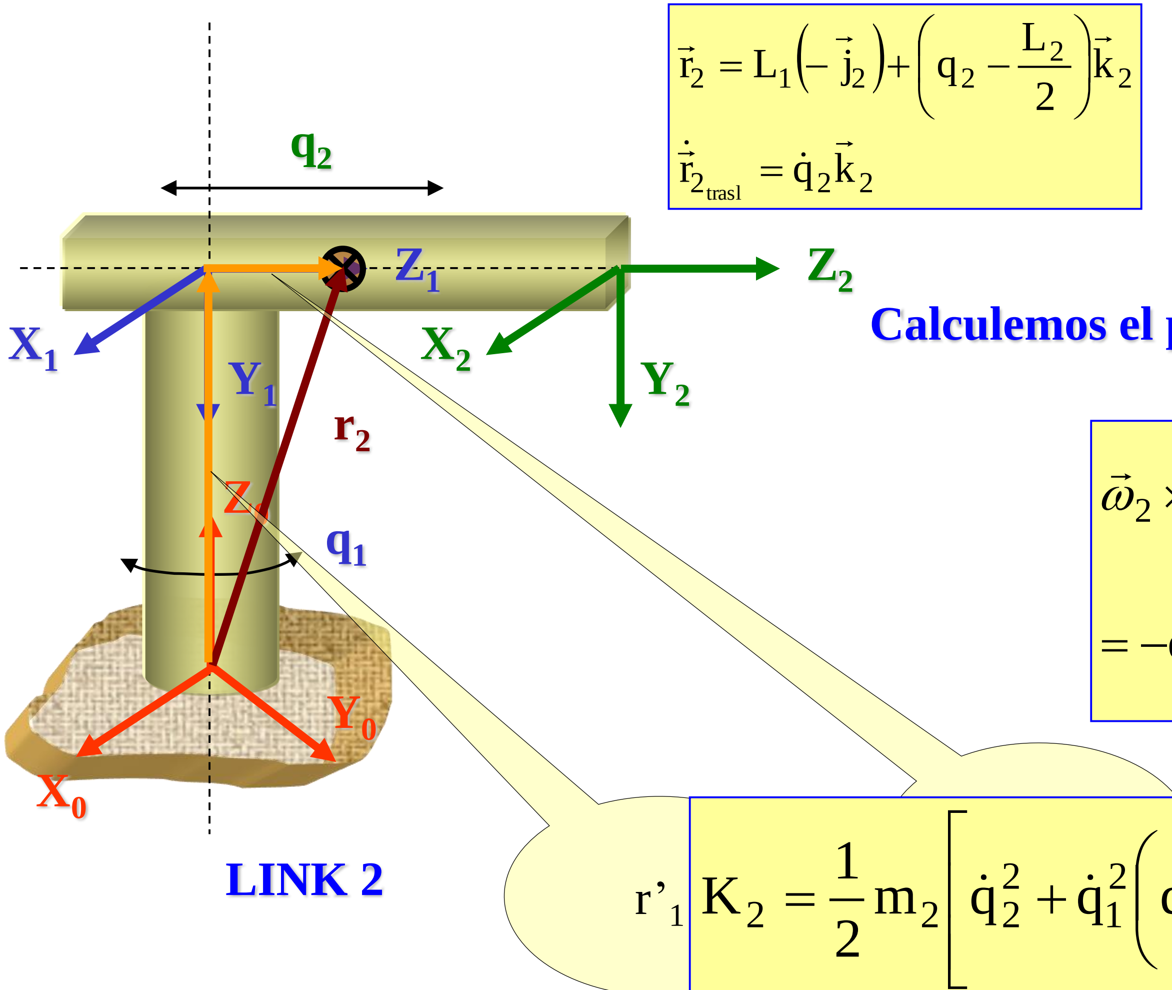
$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_{1_{trasl}} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 =$$

$$= \vec{0} + \dot{q}_1 \frac{L_1}{2}\left(\vec{k}_0\right) \times \left(\vec{k}_0\right) = \vec{0}$$

$$\mathrm{K}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\mathrm{P}_1}\dot{\mathrm{q}}_1^2$$

$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{m}_1\mathrm{g}\frac{\mathrm{L}_1}{2}$$

Ejemplo…



LINK 2

$$\vec{r}_2 = L_1\left(-\vec{j}_2\right) + \left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)\vec{k}_2$$

$$\dot{\vec{r}}_{2_{trasl}} = \dot{q}_2 \vec{k}_2$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{q}_1(-\vec{j}_2) \qquad \mathbf{0}$$

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_1' + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2'$$

Calculemos el producto vectorial en el sistema 2

$$\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2' = \dot{q}_1\left(-\vec{j}_2\right) \times \left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)\vec{k}_2 =$$

$$= -\dot{q}_1\left(q \ldots\right.$$

$$\vec{v}_2 = \dot{q}_2 \vec{k}_2 - \dot{q}_1\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)\vec{i}_2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)^2\right]$$

$$U_2 = m_2 g L_1$$

Tabla de Woo…

Link i=	$\bullet$	ENERGIAS	$*$	$\dfrac{\partial(\bullet)}{\partial \dot{q}_i}$	$\dfrac{d(*)}{dt}$		$\dfrac{\partial(\bullet)}{\partial q_i}$
K_1	1		1			1	
K_2	2		2			2	
K_3	3		3			3	
U_1	4		4			4	
U_2	5		5			5	
U_3	6		6			6	
1+2+3-4-5-6	7		7 A			7 B	
7A-7B	8		8				

Tabla de Woo…

Link i=1	$\bullet$	ENERGIAS	$*$	$\dfrac{\partial(\bullet)}{\partial \dot{q}_i}$	$\dfrac{d(*)}{dt}$		$\dfrac{\partial(\bullet)}{\partial q_i}$
K_1	1	$\frac{1}{2} I_{P_1} \dot{q}_1^2$	1	$I_{P_1} \dot{q}_1$	$I_{P_1} \ddot{q}_1$	1	0
K_2	2	$\frac{1}{2} m_2 \left[\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} I_{2_{CM}} \dot{q}_1^2$	2	$m_2 \dot{q}_1 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right)^2 + I_{2_{CM}} \dot{q}_1$	$m_2 \ddot{q}_1 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right)^2 + 2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right) + I_{2_{CM}} \ddot{q}_1$	2	0
K_3	3		3			3	
U_1	4	$m_1 g \frac{L_1}{2}$	4	0	0	4	0
U_2	5	$m_2 g L_1$	5	0	0	5	0
U_3	6		6		$I_{P_1} \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_1 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right)^2 + 2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right) + I_{2_{CM}} \ddot{q}_1$	6	
1+2+3-4-5-6	7		7A			7 B	0
7A-7B	8		8		$\left[I_{P_1} + m_2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right)^2 + I_{2_{CM}} \right] \ddot{q}_1 + 2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2} \right) = \tau_1$		

Tabla de Woo…

Link i=2	$\bullet$	ENERGIAS	$*$	$\dfrac{\partial(\bullet)}{\partial \dot{q}_i}$	$\dfrac{d(*)}{dt}$		$\dfrac{\partial(\bullet)}{\partial q_i}$
K_1	1	$\boxed{\frac{1}{2} I_{P_1} \dot{q}_1^2}$	1	**0**	**0**	1	**0**
K_2	2	$\boxed{\frac{1}{2} m_2 \left[\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2} I_{2_{CM}} \dot{q}_1^2}$	2	$\boxed{m_2 \dot{q}_2}$	$\boxed{m_2 \ddot{q}_2}$	2	$\boxed{m_2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right) \dot{q}_1^2}$
K_3	3		3			3	
U_1	4	$\boxed{m_1 g \frac{L_1}{2}}$	4	**0**	**0**	4	**0**
U_2	5	$\boxed{m_2 g L_1}$	5	**0**	**0**	5	**0**
U_3	6		6			6	
1+2+3-4-5-6	7		7 A		$\boxed{m_2 \ddot{q}_2}$	7 B	$\boxed{m_2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right) \dot{q}_1^2}$
7A-7B	8		8		$\boxed{m_2 \ddot{q}_2 - m_2 \left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right) \dot{q}_1^2 = F_2}$		

Implementemos el modelo …

$$\left[I_{P_1} + m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)^2 + I_{2_{CM}}\right]\ddot{q}_1 + 2m_2\dot{q}_1\dot{q}_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right) = \tau_1$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{\tau_1 - 2m_2\dot{q}_1\dot{q}_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)}{\left[I_{P_1} + m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)^2 + I_{2_{CM}}\right]}$$

$$m_2\ddot{q}_2 - m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)\dot{q}_1^2 = F_2$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{F_2}{m_2} + \left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)\dot{q}_1^2$$

Otra forma de simulación

Si deseamos incluir el actuador (Motor CD, por ejemplo) es mejor cambiar la forma de simular el robot

$$\left[I_{P_1} + m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)^2 + I_{2_{CM}}\right]\ddot{q}_1 + 2m_2\dot{q}_1\dot{q}_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right) = \tau_1$$

$$m_2\ddot{q}_2 - m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)\dot{q}_1^2 = F_2$$

$$\begin{bmatrix} I_{P_1} + m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right)^2 + I_{2_{CM}} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2\left(q_2 - \frac{L_2}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_1 \\ F_2\end{bmatrix}$$

Otra forma de simulación